CONCOURS SPÉCIAL T'

ÉPREUVE de MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Durée : 3 heures – Coefficient : 4.

L'usage des calculatrices programmables et alphanumériques est autorisé sous réserve des dispositions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

La précision des raisonnements et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies

INTRODUCTION

L'objet de l'épreuve est l'étude de problèmes mathématiques que l'on peut rencontrer en modélisant la flexion d'une poutre reposant sur ses extrémités et soumise à une charge.

On fixe un réel a strictement positif et on pose $I = [-a, a]$.

Pour chaque entier naturel m, on note $\mathcal{C}^m$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles définies sur I et de classe C^m sur I. On désigne par $\mathcal{L}_m$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^m$ constitué des fonctions u vérifiant en outre les «conditions aux limites » suivantes : $u(a) = 0$ et $u(-a) = 0$.

$\mathcal{C}^0_+$ désigne l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}^0$ positives ou nulles sur I.

Les caractéristiques physiques de la poutre conduisent à envisager une fonction p fixée dans $\mathcal{C}^0_+$. La poutre est soumise à une sollicitation modélisée par une fonction s de $\mathcal{C}^0$. On est conduit alors à l'étude des problèmes suivants :

- $\mathcal{P}_1(p, s)$: « Trouver $u \in \mathcal{L}_2$ tel que : $\forall\ x \in I \quad -u''(x) + p(x)\,u(x) = s(x)$».
- $\mathcal{P}_2(p, s)$: « Pour $y \in \mathcal{L}_1$, on pose $U(y) = \int_{-a}^{a} \left[(y'(t))^2 + p(t)\,(y(t))^2 - 2s(t)\,y(t) \right] dt$.
  Trouver $v \in \mathcal{L}_1$ tel que $U(v) = \inf_{y \in \mathcal{L}_1} U(y)$.»

Rappel : Si on désigne par $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions u de $\mathcal{C}^2$ solutions sur I de l'équation **(H)** définie par

(H) : $-u'' + pu = 0$, alors, pour chaque réel t_0 de I, l'application $J_{t_0} : u \in \mathcal{H} \longrightarrow (u(t_0), u'(t_0)) \in \mathbb{R}^2$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Pour tous u_1 et u_2 de $\mathcal{H}$, on pose enfin $W(u_1, u_2) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u'_1 & u'_2 \end{vmatrix}$.

Partie A

Le but de cette partie est l'étude de l' équation **(H)**. On fixe p dans $\mathcal{C}^0_+$.

I. Détermination de $\mathcal{H} \cap \mathcal{L}_2$ et conséquences :

I.1. Vérifier que $\mathcal{L}_m$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^m$.

I.2. Soit u une fonction fixée arbitrairement dans $\mathcal{H}$.

I.2.a. Montrer que la fonction $u\,u'$ est croissante (au sens large).

I.2.b. En déduire que si l'équation $u(x)=0$ a au moins deux racines distinctes dans I alors u est la fonction nulle sur I.

I.3. Préciser $\mathcal{H} \cap \mathcal{L}_2$.

I.4. En déduire que, pour chaque couple (p, s) de $\mathcal{C}^0_+ \times \mathcal{C}^0$, le problème $\mathcal{P}_1(p, s)$ a au plus une solution.

I.5. On suppose dans cette question que p est paire et que le problème $\mathcal{P}_1(p, s)$ admet au moins une solution. On note f cette solution. Établir que si s est paire alors f l'est aussi. Prouver un résultat analogue si s est impaire.

II. Recherche d'un couple (φ, ψ) de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ vérifiant des conditions particulières :

Soit h_1 la fonction de $\mathcal{H}$ vérifiant les conditions : $h_1(-a)=0$ et $h'_1(-a)=1$.

Soit h_2 la fonction de $\mathcal{H}$ vérifiant les conditions : $h_2(a)=0$ et $h'_2(a)=-1$.

II.1. Montrer que h_1 est strictement positive sur l'intervalle $]-a,a]$. Donner un résultat analogue pour la fonction h_2.

II.2. Prouver que le couple (h_1, h_2) est une base de $\mathcal{H}$.

II.3. Montrer que, pour tout couple (u_1, u_2) de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, la fonction $W(u_1, u_2)$ est constante sur I.

II.4. En déduire qu'il existe un couple (φ, ψ) de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, et un seul vérifiant les conditions suivantes :

$$\varphi(-a)=0,\ \psi(a)=0,\ \varphi(0)=\psi(0),\ \varphi(0)>0 \text{ et } W(\varphi,\psi)=-1.$$

On exprimera ce couple (φ, ψ) au moyen de h_1, h_2, $h_1(a), h_1(0)$ et $h_2(0)$.

II.5. **Cas particulier** : On suppose dans cette question que p est la fonction constante égale à ω^2 sur I où ω est un réel strictement positif fixé. Expliciter alors h_1, h_2, φ et ψ en fonction de a et de ω.

Partie B

On fixe encore une fonction p de $\mathcal{C}^0_+$. On se propose de montrer l'existence d'une solution du problème $\mathcal{P}_1(p, s)$ pour chaque s de $\mathcal{C}^0$. On reprend les notations du **A)**, et, compte tenu de la question **A.I.4)**, on étudie ensuite l'application Φ de $\mathcal{C}^0$ dans lui-même qui, à chaque s de $\mathcal{C}^0$, associe l'unique solution du problème $\mathcal{P}_1(p, s)$.

I. Existence et expression de la solution de $\mathcal{P}_1(p, s)$:

On fixe arbitrairement s dans $\mathcal{C}^0$.

I.1. En appliquant la méthode de «variation des constantes» à la fonction $C_1\varphi + C_2\psi$, démontrer que le problème $\mathcal{P}_1(p, s)$ a au moins une solution.

On exprimera cette solution au moyen de φ, ψ et s. On la note $\Phi(s)$.

I.2. On définit la fonction G de $I \times I$ dans $\mathbb{R}$ par les conditions suivantes :
$G(x,t) = \varphi(x)\,\psi(t)$ si $-a \le x \le t \le a$ et $G(x,t) = \varphi(t)\,\psi(x)$ si $-a \le t \le x \le a$.

Établir que, pour tout x de I, on a l'égalité $\Phi(s)(x) = \int_{-a}^{a} G(x,t)\,s(t)dt$.

II. Étude de l'application Φ :

II.1.a. Montrer l'inclusion $\Phi(\mathcal{C}^0_+) \subset \mathcal{C}^0_+$.

II.1.b. Soient s_1 et s_2 deux fonctions distinctes prises dans $\mathcal{C}^0$ et telles que :
$\forall\ x \in I, \quad s_1(x) \le s_2(x)$.
Démontrer que pour tout x de $]-a, a[$, on a l'inégalité stricte :
$\Phi(s_1)(x) < \Phi(s_2)(x)$.

II.2. Dans cette question, on considère une fonction s de $\mathcal{C}^0_+$ différente de la fonction nulle, et une fonction q de $\mathcal{C}^0_+$ distincte de p. On désigne alors par f et g les solutions respectives des problèmes $\mathcal{P}_1(p, s)$ et $\mathcal{P}_1(q, s)$.

Démontrer que si l'on a $p \le q$ sur I alors on a $f > g$ sur $]-a, a[$.

II.3. On munit l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0$ de la norme définie par $\|u\|_\infty = \sup_{x \in I} |u(x)|$.

(On admettra que $\|..\|_\infty$ est une norme sur cet espace).

II.3.a. Démontrer qu'il existe une constante K telle que pour tout s de $\mathcal{C}^0$ on ait l'inégalité : $\|\Phi(s)\|_\infty \le K\,\|s\|_\infty$. Que peut-on en déduire sur Φ ?

II.3.b. On reprend dans cette question l'hypothèse du **A.II.5)**.

Calculer la norme de l'endomorphisme Φ de l'espace normé $(\mathcal{C}^0, \|..\|_\infty)$ en fonction des réels ω et a. On rappelle que cette norme est le réel défini par $\sup_{s \in \mathcal{C}^0 \setminus \{0\}} \dfrac{\|\Phi(s)\|_\infty}{\|s\|_\infty}$.

III. Une interprétation de $G(\cdot, t_0)$ pour t_0 fixé dans l'intervalle $]-a, a[$:

On considère la fonction réelle ρ définie sur $\mathbb{R}$ par les conditions suivantes :
$\rho(t) = 1 - |t|$ si $|t| \le 1$, et $\rho(t) = 0$ si $|t| > 1$. On fixe un réel t_0 de l'intervalle $]-a, a[$ et pour chaque couple (t, n) de $\mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$ on pose $\rho_n(t) = n\rho[n(t - t_0)]$. On désigne par s_n la restriction de ρ_n à I.

III.1. Représenter graphiquement la fonction ρ_n.

III.2. Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour $n \ge n_0$ on ait $\int_{-a}^{a} s_n(t)dt = 1$.

III.3. Démontrer que la suite $(\Phi(s_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la fonction $G(\bullet, t_0)$, uniformément sur I.

Partie C

Le but de cette partie est de résoudre le problème $\mathcal{P}_2(p, s)$ en utilisant le problème $\mathcal{P}_1(p, s)$. On fixe donc (p, s) dans $\mathcal{C}^0_+ \times \mathcal{C}^0$, et on pose $f = \Phi(s)$.

I. Soit y une fonction fixée arbitrairement dans $\mathcal{L}_1$.

I.1. Démontrer l'égalité $\int_{-a}^{a} f'(t)\, y'(t)\, dt = -\int_{-a}^{a} p(t)\, f(t)\, y(t) dt + \int_{-a}^{a} s(t)\, y(t)\, dt$.

I.2. En déduire l'égalité $U(f+y) - U(f) = \int_{-a}^{a} \left[(y'(t))^2 + p(t)\,(y(t))^2 \right] dt$.

II. Résoudre alors le problème $\mathcal{P}_2(p, s)$ en utilisant f. On étudiera l'existence et l'unicité d'une solution du problème $\mathcal{P}_2(p, s)$.

Partie D

On fixe un couple (p, s) de $\mathcal{C}^0_+ \times \mathcal{C}^0$. Le but de cette partie est d'obtenir une approximation de la fonction $f = \Phi(s)$ au moyen d'un système linéaire.
On considère un entier naturel $n \geq 2$.

I. Approximation d'une dérivée seconde :

Soit F de classe C^2 au voisinage de x_0. Déterminer :

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h^2} \left[F(x_0 + h) - 2F(x_0) + F(x_0 - h) \right]$$

II. Décomposition d'une matrice tridiagonale symétrique :

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des réels de $\mathbb{R}^-$ et la matrice A de terme générique a_{ij} défini par les conditions :

$$\forall\ i \in \{1, \ldots, n\}, \qquad a_{ii} = 2 + \alpha_i$$

$$\forall\ i \in \{1, \ldots, n-1\}, \qquad a_{i\,i+1} = a_{i+1\,i} = -1$$

$$a_{ij} = 0 \text{ dans les autres cas.}$$

II.1. On considère deux suites réelles finies $(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n)$ et $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$, et les matrices B et D de termes génériques respectifs b_{ij} et d_{ij} définis par les conditions :

$$\forall\ i \in \{1, \ldots, n\}, \qquad b_{ii} = 1 \text{ et } d_{ii} = \gamma_i$$

$$\forall\ i \in \{1, \ldots, n-1\}, \qquad b_{i\,i+1} = \beta_{i+1}$$

$$b_{ij} = 0 \text{ et } d_{ij} = 0 \text{ dans les autres cas.}$$

Calculer le produit matriciel ${}^tBDB$.

II.2. Démontrer qu'il existe deux suites $(\beta_2, \ldots, \beta_n)$ et $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ telles que $A = {}^tBDB$.

II.3. En déduire que A est inversible.

III Approximation de $f = \Phi(s)$:

(On n'étudie pas la qualité de cette approximation).

On pose $h = \dfrac{2a}{n+1}$ et on considère la subdivision de I définie par les points $x_k = -a + kh$ où $k \in \{0, \ldots, n+1\}$. Pour chaque k on pose $p(x_k) = p_k$ et $s(x_k) = s_k$.

On considère alors le problème $\Pi(p, s)$ suivant :

$\Pi(p, s)$: «Trouver les suites réelles finies $(y_0, y_1, \ldots, y_{n+1})$ telles que $y_0 = 0, y_{n+1} = 0$ et pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ $-\dfrac{1}{h^2}[y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}] + p_k y_k = s_k$.»

III.1 Montrer que la résolution du problème $\Pi(p, s)$ revient à trouver une matrice colonne $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$ telle que $MY = \begin{pmatrix} s_1 \\ . \\ . \\ . \\ s_n \end{pmatrix}$ où M est une matrice carrée à préciser.

III.2 En déduire que le problème $\Pi(p, s)$ a une solution et une seule, et indiquer un procédé pour obtenir cette solution.

Fin de l'énoncé.